

基金投资计划的数学建模及解的性质*

吴 红, 王远世

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 按照最优化原则, 对基金投资计划问题进行了分析和处理, 建立了通用的数学模型, 对只存款不购国库券及可存款也可购国库券两种情形进行数学建模, 探讨了模型所反映的数据规律, 证明两种情形分别存在重要的周期性性质。

关键词: 年利率; 数学模型; 最优化

中图分类号: O175.24 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2003) S1-0254-02

1 问题的引入

最佳投资方案数学建模的研究正日益引起数学工作者的关注, 见文 [1-4]。考虑 2001 年文 [2] 提出的模型: 某校基金会的 M 元基金, 计划在 n 年内将其投资, 每年用部分本息发放数额大致相同的奖金, 第 n 年年末仍保留原基金数额。投资方式为存入银行或购买国库券, 要求根据现有银行存款及国库券利率, 分二种情况设计基金使用方案, 使得每年的奖金尽量多: ①只存款不购买国库券; ②可存款也可购买国库券 (表 1)。

表 1 2001 年人民币银行存款税后年利率
及国库券年利率

Tab.1

项目	活期	半年期	一年期	二年期	三年期	五年期
银行存款税 后年利率/%	0.792	1.664	1.800	1.944	2.160	2.304
国库券 年利率/%				2.55	2.89	3.14

2 主要结论及证明

这是一个在一定约束条件下求最优化的问题, 可化为多阶段配置的线性规划问题, 见文 [3-5]。由于每年都要发放奖金, 故须以每年为阶段进行逐阶段处理。从 n 年整体来看, 因第 n 年年末仍保留原基金数额, 故每年奖金可看作出自基金在 n 年的利息。由最优化原则, “使每年的奖金尽量多” 等价于 “使基金每年的利息损失尽量少”, 后者即为解决该问题的出发点。记: M 为基金总额, r_{-1}

为活期存款税后年利率, r_0 为半年定期存款税后年利率, A 为每年的奖金额, r_i 为 i 年定期的存款税后年利率, R_i 为 i 年期国库券的年利率 ($i > 0$)。

2.1 只存款不购国库券的模型

记 x_{ki} 为第 k 个 5 年中, 首年年初存款 i 年定期的金额, M_k 为第 k 个 5 年首年的可用金额, k, i 均为非负的整数。由 M_1 的定义可知 $M_1 = M$ 。

设 $n = 5k + N, 1 \leq N \leq 5, k \geq 0$ (k, N 均为整数)。由利息损失最小原则, 对前 k 个 5 年, 在第 i 个 5 年 ($0 < i < k + 1$) 的年初存一年定期 x_{i1} , 存二年定期 x_{i2} , 存三年定期 x_{i3} , 存五年定期 $x_{i5}, 1 \leq i \leq k$ 。其中一年期本息发第一年奖金; 二年期本息发第二年奖金; 三年期本息发第三年奖金, 余额存一年定期, 本息发第四年奖金; 五年期本息发第五年奖金, 余额转为下一个五年的可用资金。故由前 k 个 5 年可得 $5k$ 个方程

$$\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i5} = M_i \\ x_{i1}(1 + r_1) + A \\ x_{i2}(1 + 2r_2) = A \\ [x_{i3}(1 + 3r_3) - A](1 + r_1) + A \\ x_{i5}(1 + 5r_5) - A = M_{i+1} \end{cases} \quad (1)$$

其中, $1 \leq i \leq k$ 。对最后 N 年, 分别作如下处理:

若 $N = 1$, 一年期本息发第 $k + 1$ 个 5 年首年奖金及归还本金 M , 即

$$x_{k+1,2} = x_{k+1,3} = x_{k+1,5} = 0, x_{k+1,1} = M_{k+1}, \\ x_{k+1,1}(1 + r_1) - A = M。$$

若 $N = 2$, 一年期本息发第 $k + 1$ 个 5 年首年奖金, 二年期本息发第 $k + 1$ 个 5 年次年奖金及归还本金 M , 即

* 收稿日期: 2003 - 03 - 03

作者简介: 吴红 (1966 年生), 女, 副研究馆员; E-mail: zsuwh@163.com

$$x_{k+1,3} = x_{k+1,5} = 0, x_{k+1,1} + x_{k+1,2} = M_{k+1},$$

$$x_{k+1,1}(1+r_1) = A, x_{k+1,2}(1+2r_2) - A = M$$

若 $N = 3$, 一、二年期本息发第 $k+1$ 个 5 年首年、次年奖金, 三年期本息发第 $k+1$ 个 5 年第三年奖金及归还本金 M , 即

$$x_{k+1,5} = 0, x_{k+1,1} + x_{k+1,2} + x_{k+1,3} = M_{k+1},$$

$$x_{k+1,1}(1+r_1) = A, x_{k+1,2}(1+r_2) = A,$$

$$x_{k+1,3}(1+r_3) - A = M$$

若 $N = 4$, 一、二年期本息发第 $k+1$ 个 5 年首年、次年奖金, 三年期本息发第 $k+1$ 个 5 年第三年奖金, 余额存一年定期, 发第 $k+1$ 个 5 年第四年奖金及归还本金 M , 即

$$x_{k+1,5} = 0, x_{k+1,1} + x_{k+1,2} + x_{k+1,3} = M_{k+1},$$

$$x_{k+1,1}(1+r_1) = A, x_{k+1,2}(1+r_2) = A,$$

$$[x_{k+1,3}(1+r_3) - A][(1+r_1) - A] = M$$

若 $N = 5$, 令 $M_{k+2} = M$, 由第 $k+1$ 个 5 年可得到 5 个方程。

综上所述, 总共得到 $5(k+1)$ 个方程。由于所有变元即

$$\{(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i5}, M_i, 1 \leq i \leq k+1) \cup \{A\} \setminus M_i\}$$

故变元个数为 $5(k+1)$ 个。因此, 有 $5(k+1)$ 个变元, $5(k+1)$ 个方程, 易见所有变元均可由 A 线性表出, 故由代入消元法可将该线性方程组化为一个关于 A 的线性方程。再由最高奖金额的存在性及有界性, 知该线性方程不可能无解, 也不可能有无穷多个解, 故必存在唯一解, 从而原线性方程组存在唯一解, 所求解即为最佳存款方案。

定理 1 对只存款不购买国库券的情形, 若 $n = 5k$, k 为正整数, $k > 1$, 则最佳投资方案呈周期性, 周期为 5 年。

证明 因方程组 (1) 必存在惟一解, 令 $M_i =$

$M, 1 \leq i \leq k+1$, 即可使第 i 个 5 年得到的 5 个方程等价于 $n = 5$ 时的方程组, 而 $n = 5$ 时的方程组存在惟一解, 定理证毕。

2.2 可存款也可购国库券的模型

记 x_{ki} 为第 k 个 6 年中, 首年年初存款 i 年定期的金额; X_{ki} 为第 k 个 6 年中, 首年购买 i 年期国库券的金额; M_k 为第 k 个 6 年首年的可用金额。设 $n = 6k$, 由利息损失最小原则, 有

$$\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i5} = M_i \\ x_{i1}(1+r_1) + A \\ x_{i2}(1+2r_2) + A \\ x_{i3}(1+3r_3) + A \\ \left[x_{i3}(1+3r_3) \left(1 + \frac{1}{2}r_0 \right) \left(1 + \frac{1}{2}r_{-1} \right) - A \right] \cdot (2) \\ (1+r_1) = A \\ x_{i5}(1+5r_5) \left(1 + \frac{1}{2}r_0 \right) \left(1 + \frac{1}{2}r_{-1} \right) - A = \\ M_{i+1} \end{cases}$$

其中, $1 \leq j \leq k$ 。易见 (2) 存在惟一解, 所求解即为最佳存款方案。

定理 2 对可存款也可购买国库券的情形, 若 $n = 6k$, k 为正整数, $k > 1$, 则最佳投资方案呈周期性, 周期为 6 年。

参考文献:

- [1] 孙波, 赵怡. 投资的收益和风险的数学建模及算法研究[J]. 数学的实践与认识, 2001, 31(4): 385-390.
- [2] 数学建模. www.163.com. 2001-09
- [3] 吴岚. 金融数学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002.
- [4] 朱思铭, 李尚廉. 数学模型[M]. 广州: 中山大学出版社, 1995.
- [5] 中国人民数学教研组. 运筹学通论[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2000.

Mathematical Model for the Plan of Fund Utilization and Its Property

WU Hong, WANG Yuan-shi

(School of Mathematics and Scientific Computation, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: According to the principle of optimization, the plan of fund utilization is given by a mathematical model. The existence and uniqueness of the solution are discussed and the periodic principle of the solution under a special condition is proved.

Key words: annual interest rate; linear equations; mathematical model